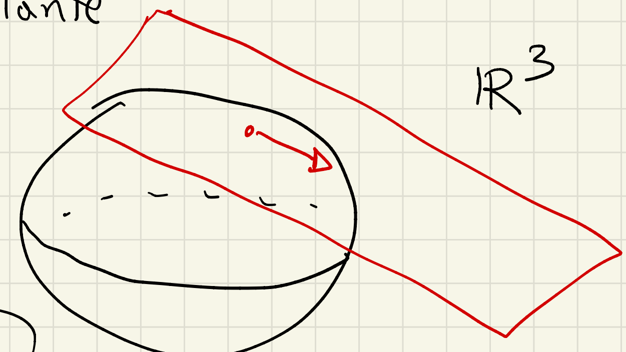
Geometria differenziale

Bruno Martelli → didattica → NOTE Manifolds

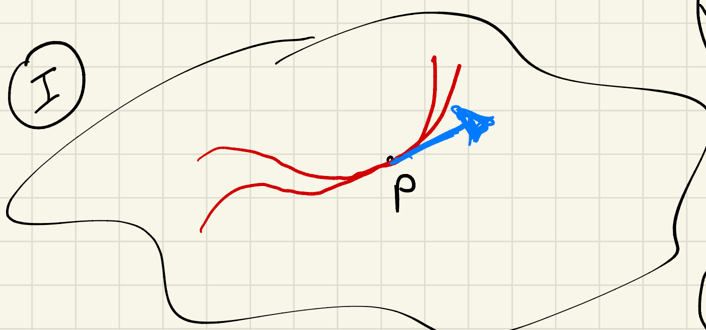
ogni 2 settimane : esercizi

M varietà = sp. top. + atlante



vettori tangenti

- curve



$T_pM = \{$vettori tangenti in $p \in M\}$

SPAZIO VETTORIALE

II DERIVAZIONI

come derivate direzionali in $\mathbb{R}^3$

ALGEBRA TENSORIALE: $\quad V \quad$ dim $n \quad \longrightarrow V^*$

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \qquad \boxed{V^{**} = V}$$

TENSORE di tipo (h,k)

$(1,0) \quad V$

$(0,1) \quad V^*$

$(1,1) \quad V \otimes V^* = \mathrm{Hom}(V,V)$

prodotti scalari $\longrightarrow (0,2) \quad V^* \otimes V^*$

$(0,n)$ prende n vettori $\longrightarrow$ restituisce un numero

$(1,n)$ " " " $\longrightarrow$ " " " vettore

$(1,2)$ prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$M \quad$ FIBRATO TANGENTE $\quad TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM \quad (1,0)$

(è una varietà di dim $2n$)

$\forall p \in M \qquad \cancel{T_pM} \longrightarrow T_pM^*$ $(0,1)$

FIBRATO COTANGENTE

FIBRATO DEI TENSORI (h,k)

$$\mathcal{T}^h_k(T_pM) = \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{h} \otimes \underbrace{T_pM^* \otimes \cdots \otimes T_pM^*}_{k}$$

$$\mathcal{T}^h_k(M) = \bigsqcup_{p\in M} \mathcal{T}^h_k(T_pM)$$

CAMPO TENSORIALE

SEZIONE

$$X : M \longrightarrow \mathcal{T}^h_k(M)$$

$$X(p) \in \mathcal{T}^h_k(T_pM) \quad \forall p \in M$$

C^∞

LISCIO

Ci interessano: $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$

$(0,2)$ TENSORE METRICO

$(0,k)$ k-forme

$(1,2)$

$\boxed{(1,3) \text{ CURVATURA}}$

CAMPO VETTORIALE

$$\mathfrak{X}(M) = \{\text{campi vettoriali su } M\}$$

LOC. (in carta) $\quad \mathbf{X} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i}$ $\qquad (e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)\, e_i$$

$$e_i \dashrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\mathbf{X}(p)(f) = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Altre coordinate $\bar{x}$ $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$$

Jacobiano giusto

CONVENZIONE DI EINSTEIN :

Si somma sugli indici ripetuti

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

BRACKET DI LIE

$$X, Y \in \mathfrak{X}(M) \dashrightarrow [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

In carte:

$$[X,Y] = X^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X}{\partial y^i}$$

$$X(Yf) - Y(Xf)$$

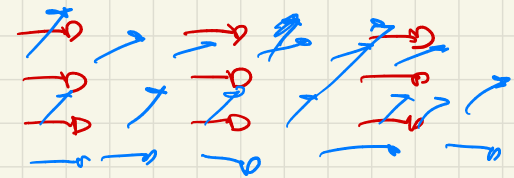
è derivazione

$\rightarrow$ è un campo

$$[X,Y]^j = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial y^i} \qquad X, Y \qquad Z(f) = X(Yf)$$

non è un campo

Esempio: $X = \frac{\partial}{\partial x^{i_0}}$ $\qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$



$$\boxed{[X,Y] = \frac{\partial Y}{\partial x^{i_0}}} = 0\,?$$

Cor: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$

Richiamo: $f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$

$X \in \mathfrak{X}(M)$

$fX \in \mathfrak{X}(M) \qquad (fX)(p) = f(p)X(p)$

$Xf \in \mathcal{C}^\infty(M)$

Ex: $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$

Ex: $A, B \in M(n)$ matrici reali $n \times n$

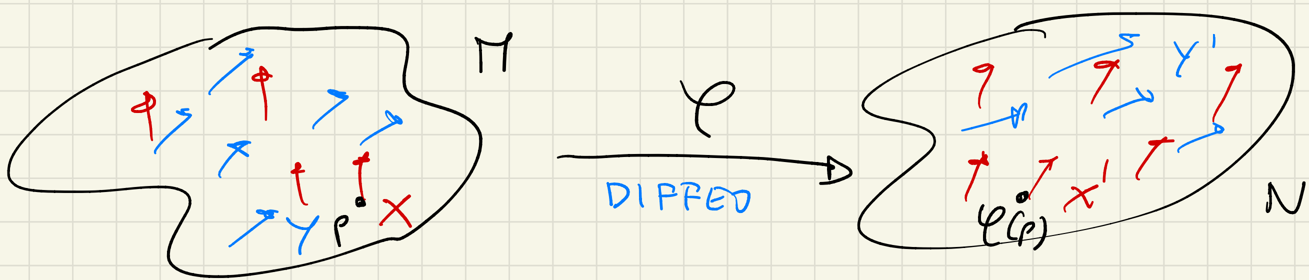
$p \in \mathbb{R}^n$ $\quad X(p) = A \cdot p \qquad Y(p) = B \cdot p$

$$[X,Y] = (BA - AB) \cdot p$$

X, Y commutano $\iff$ A, B commutano

$$[X,Y] \equiv 0$$

Oss: Il bracket è coinvariante per diffeomorfismo



I diffeo trasportano tutto

In generale i campi tensoriali si trasportano via diffeo.

FORMALMENTE: $\forall p \in M$

$$X'(\varphi(p)) = d\varphi_p(X(p))$$

$$[X, Y] \dashrightarrow [X', Y']$$

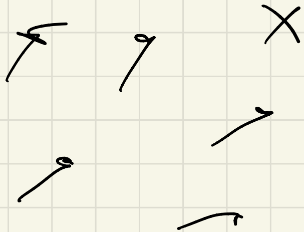
$$[X', Y'] = [X, Y]'$$

Teo: X, Y — I flussi commutano $\Leftrightarrow$ i campi commutano

$$\begin{array}{ccc} & X, Y & \\ \swarrow & & \searrow \\ F & & G \\ \text{flusso} & & \text{flusso} \end{array}$$

Def: F e G commutano :=

$$G(F(p,t),u) = F(G(p,u),t)$$



$U \subseteq M \times \mathbb{R}$

$F: \cancel{M \times \mathbb{R}} \to M$

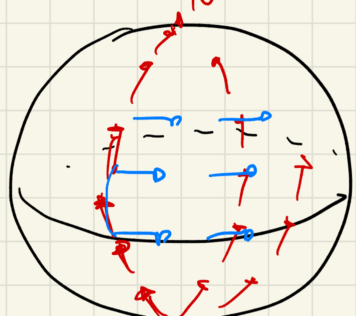
$(p, t) \mapsto$ punto della linea integrale tangente a $X(p)$ dopo t secondi

Esempi:

1) $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ rettangoli

$$F(p,t) = p + te_i$$

2)



Teo (del raddrizzamento di campi)

$X_1, \dots, X_k$ campi in M^n $\quad k \leq n$

Dato $p \in M$,

$\exists$ carta $U(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ che raddrizza i campi

(cioè che li trasforma nei $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$)

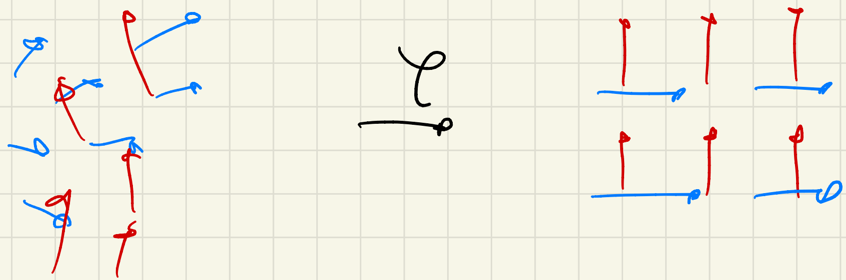
$\Leftrightarrow$ 1) $X_1(p), \dots, X_k(p)$ vettori indipendenti

2) $X_1, \dots, X_k$ commutano ($[X_i, X_j] = 0$ in un intorno di p)

dim $\boxed{\Rightarrow}$ Se φ trasforma $X_1, \dots, X_k$

in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \Rightarrow [X_i, X_j] = 0$$

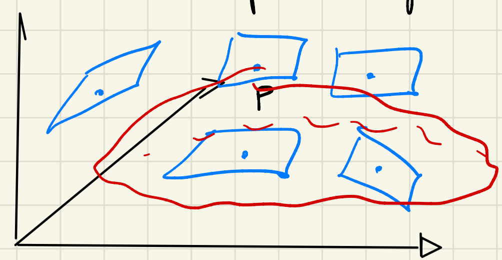


TEOREMA DI FROBENIUS

Def: M n-varietà. Una DISTRIBUZIONE di k-spazi $k \leq n$

è $\forall p \in M$ $D_p \subseteq T_pM$ k-sottospazio

$\mathbb{R}^3$



DISTRIBUZIONE DI PIANI IN $\mathbb{R}^3$

Def: D è INTEGRABILE se $\forall p \in M$ esiste
una sottovarietà k-dimensionale contenente p
tangente a tutti questi sottospazi.

Teo (Frobenius) : D è integrabile $\Leftrightarrow$ D è involutiva

Def: D è INVOLUTIVA se :
dati $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangenti a D,
allora anche $[X, Y]$ è tangente a D

(X è tangente a D se $X(p) \in D(p)$ $\forall p \in M$)